7 Nombre dérivé

Objectifs :

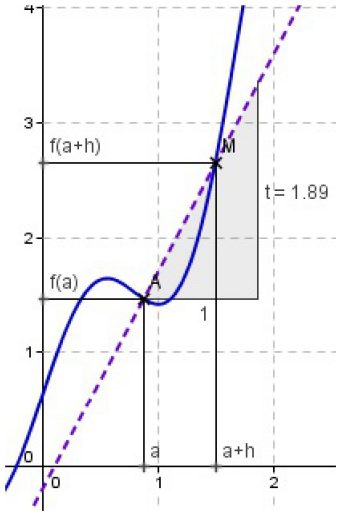
- Découvrir la notion de taux d'accroissement
- Découvrir la notion de nombre dérivé d'une fonction en un point et savoir la lire sur un graphique, la calculer algébriquement ou en obtenir une valeur approchée à l'aide de l'outil informatique.
- Savoir déterminer l'équation de la tangente en un point à une courbe lorsqu'elle existe
- Savoir tracer une tangente connaissant le nombre dérivé

Aperçu historique :

La notion de nombre dérivé, puis de fonction dérivée sont nées au XVII^{e} *siècle (presque) simultanément chez deux scientifiques* ***Leibniz*** *(1646-1716) et* ***Newton*** *(1642-1727) à partir de deux problèmes très différents. On a vu dans le chapitre* **??** *que* ***Leibniz*** *avait le premier parlé de fonction numérique. Il s'est aussi intéressé aux courbes représentatives de ces fonctions et en particulier aux droites joignant deux points d'une telle courbe. Les points $A(a;f(a))$ et $M(a+h;f(a+h))$ sont sur la courbe représentative d'une fonction f. Le coefficient directeur de la droite (AM) est $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Qu'advient-il de ce coefficient directeur lorsque les deux points A et M sont très proches l'un de l'autre, "infiniment proches" ?*
Newton *s'est intéressé aux mouvements et en particulier aux vitesses d'objets en déplacement : à un instant t, un objet a parcouru une distance d_1, à l'instant $t+h$ $(h>0)$, il a parcouru la distance d_2. Sa vitesse moyenne entre les instants t et $t+h$ est donc $V_m=\frac{d_2-d_1}{h}$. Que devient cette vitesse lorsque les instants t et $t+h$ sont très proches, "infiniment proches" ?*
Dans les deux cas, on est amené à travailler sur des nombres "infiniment proches" et donc à devoir calculer des quotients de nombres "infiniment proches de 0". Pour cela, nous allons définir (dans un premier temps de manière intuitive) la notion de limite qui a posé de nombreux soucis aux mathématiciens d'avant ***Newton*** *et* ***Leibniz*** *(voir par exemple les paradoxes de* ***Zénon d'Alexandrie****).*

1. Droite sécante à une courbe

Dans cette partie, f est une fonction numérique définie sur un intervalle I, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
a et x sont deux réels distincts dans l'intervalle I privé de ses bornes.
On note h le réel non nul tel que $x=a+h$.
On note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a, et M celui d'abscisse x.
Le coefficient directeur de la droite (AM) est le quotient $t=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.



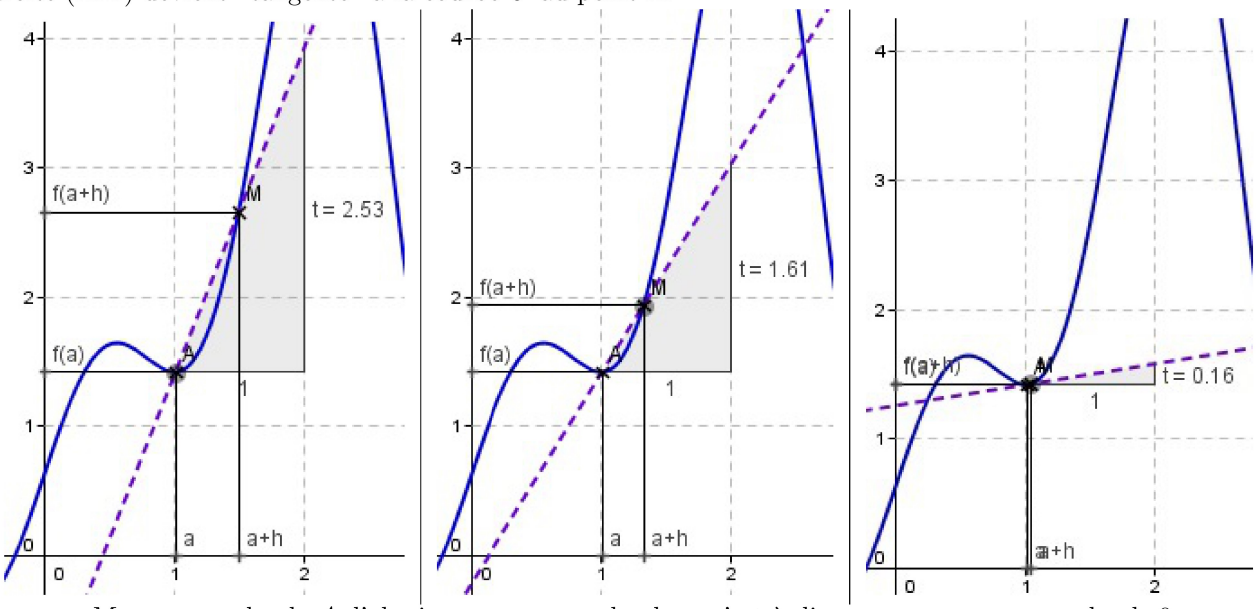
Remarque : Le coefficient directeur de la droite (AM) est aussi appelé **taux de variation** de f entre a et $a+h$.

Exemple : Pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, le coefficient directeur de la droite (AM) (avec les mêmes notations que précédemment) est :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = 2a+h$$

2. Nombre dérivé et interprétation graphique

Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. Soient a et x deux réels distincts dans l'intervalle I privé de ses bornes. On note h le réel non nul tel que $x = a+h$.
Avec les mêmes notations que précédemment, si le point M se rapproche "infiniment près" du point A, la droite (AM) devient "tangente" à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.



Lorsque M se rapproche de A, l'abscisse x se rapproche de a, c'est-à-dire que $x-a$ se rapproche de 0, c'est-à-dire que $h = x-a$ se rapproche de 0.
On dite que h **tend vers** 0, ce qui signifie que h *se rapproche infiniment près* de 0.
On note $h \to 0$.
On va s'intéresser à ce que devient le *taux de variation* $t = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (c'est la pente de la droite (AM)) lorsque $h \to 0$: ce sera la pente de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
On appelle cette pente la "**limite de t lorsque h tend vers 0**", et on la note :

$$\lim_{h\to 0} t = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

.

A. Nombre dérivé

Définition 7.1 Lorsque h se rapproche de plus en plus de 0 (i.e. quand x se rapproche de a), si le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ devient de plus en plus proche d'un certain nombre réel l, on dit que la limite quand h tend vers 0 de ce quotient vaut l.
Dans ce cas on dit que f est dérivable en a et cette limite est appelée nombre dérivé de f en a.
On note :

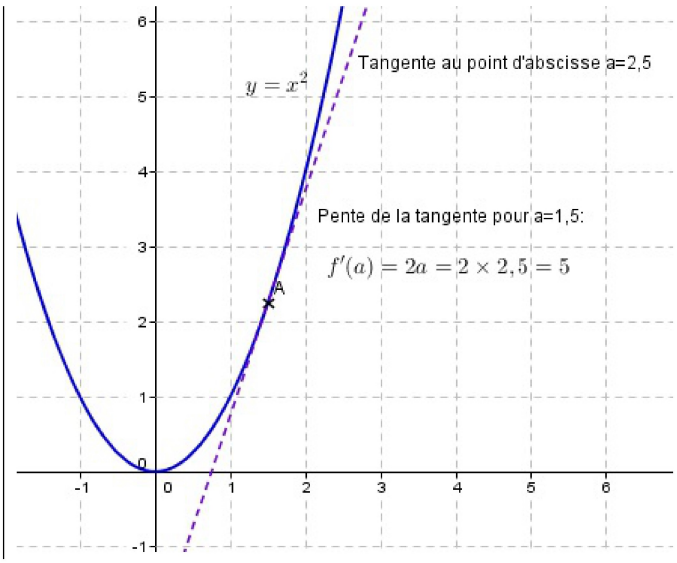
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$$

On verra ci-après que le nombre dérivé de f en a est la pente de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a, et ce nombre dérivé se note $f'(a)$.

Exemple :
En reprenant la fonction carré et le résultat obtenu dans l'exemple précédent on a :
$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = 2a+h.$
Lorsque $h \to 0$, on a $2a+h \to 2a+0$, c'est-à-dire que $2a+h \to 2a$.
Ainsi,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a$$

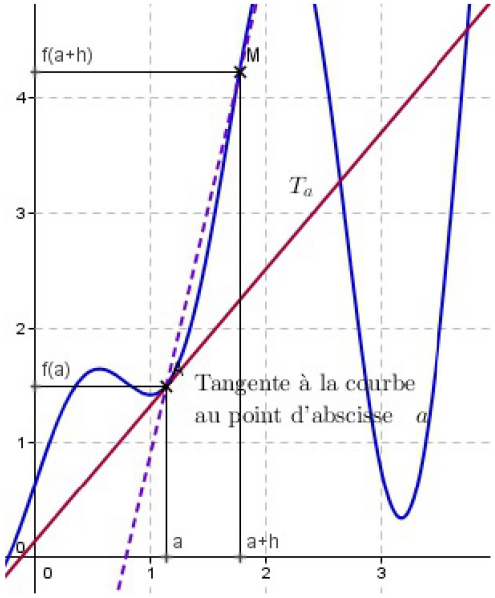
donc f est dérivable en a et on a $f'(a) = 2a$.



B. Interprétation graphique

Lorsque h se rapproche de 0, le point M se rapproche de A, et la droite (AM) se rapproche d'une "position limite" appelée **tangente** à $\mathscr{C}$ au point A ;
son coefficient directeur est alors $f'(a)$.

Exemple : Dans l'exemple précédent, au point d'abscisse a, la *pente de la tangente* à la courbe représentative de la fonction carré est $2a$.



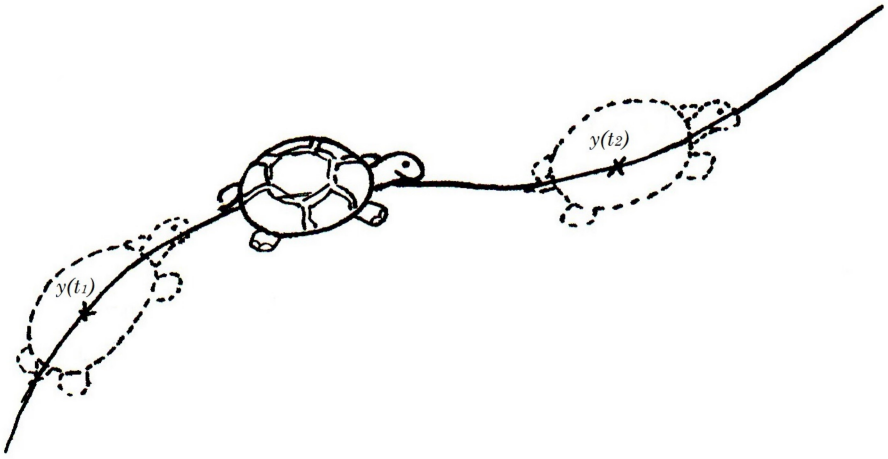
Propriété 7.1 Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$.
La tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation :

$$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Démonstration La fonction f est dérivable donc la tangente T_a admet un coefficient directeur qui est $f'(a)$.
Son équation est donc du type $y = f'(a)x + p$ (*).
De plus, $A(a; f(a)) \in T_a$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de T_a, et il vient : $f(a) = f'(a) \times a + p$.
Par suite, $p = f(a) - a \times f'(a)$.
En remplaçant dans l'équation (*) on obtient :$y = f'(a)x + f(a) - a \times f'(a)$, et donc
$T_a | y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

C. Interprétation cinématique

On considère un objet en mouvement.

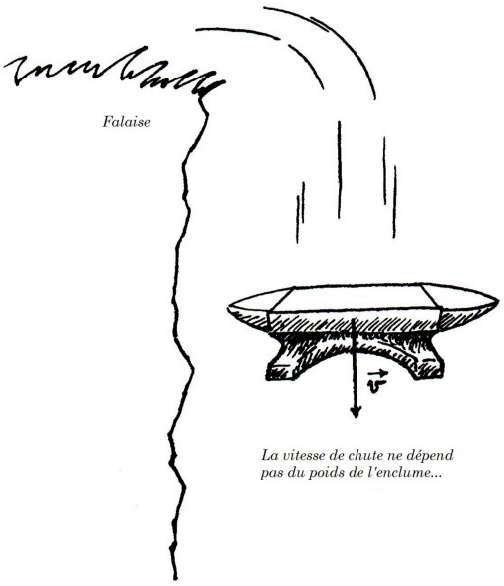


On note t la durée en secondes de son parcours, et $y(t)$ la distance en mètres, parcourue après t secondes.
Comme la vitesse moyenne est $V_m = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$, si on note t_1 et t_2 deux instants,
la distance parcourue entre t_1 et t_2 est $t_2 - t_1$, et le temps de parcours de cette distance est $y(t_2) - y(t_1)$.
Donc le quotient $\frac{y(t_2)-y(t_1)}{t_2-t_1}$ est la vitesse moyenne de l'objet entre les instants t_1 et t_2.
On s'intéresse à ce que devient cette vitesse lorsque les instants t_1 et t_1 deviennent "infiniment proches".

Définition 7.2 :
Dans les conditions précédentes, la limite de la vitesse moyenne quand t_2 se rapproche de t_1 (c'est à dire le nombre dérivé de y en t_1) est appelée vitesse instantanée de l'objet à l'instant t_1.

$$V(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{h \to 0} \frac{y(t_1 + h) - y(t_1)}{h}$$

Exemple :
On lâche un objet en chute libre. On note $x(t)$ la distance parcourue (en m) après t secondes.
On admet ([1]) que la distance parcourue s'exprime en fonction du temps de parcours par $x(t) = 4,9t^2$.
Calculer la vitesse instantanée de l'objet après une chute de t secondes.



On exprime la vitesse moyenne de l'objet entre les instants t et $t+h$:

$$v = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \frac{4,9(t+h)^2 - 4,9t^2}{h}$$

En développant, réduisant et simplifiant, on obtient :

$$v = \frac{4,9(t^2 + 2th + h^2) - 4,9t^2}{h} = \frac{9,8th + 4,9h^2}{h} = 9,8t + 4,9h$$

Lorsque h tend vers 0, ce quotient se rapproche de $9,8t$: on a $\lim\limits_{h \to 0} (9,8t + 4,9t) = 9,8t$.
Donc la vitesse instantanée de l'objet en chute libre est donnée par l'expression $v(t) = x'(t) = 9,8t$.
Après 5 secondes de chute libre, la vitesse est de $9,8 \times 5 = 49$ m/s.
(soit 179,4 km/h).

([1])Distance parcourue en chute libre : $d = \frac{1}{2}gt^2$, où $g \simeq 9,80665 m.s^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur.
On remarque que la vitesse de chute libre est indépendante de la masse de l'objet.